Test 5 – Sujet B

NOM et PRÉNOM :

Exercice 1 Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \ln\bigl(-1 - x^2 + 5x\bigr)\,.$$

(i) Trouver le domaine de définition de g [1].
(ii) Calculer sa dérivée g'.
(iii) Trouver les points critiques de g.
(iv) Trouver le signe de g' et dresser le tableau des variations de g.
(v) Parmi les points critiques, trouver les extrema locaux, et calculer la valeur de g dans ces points.
À l'aide des questions précédentes, tracer un graphe approximatif de g.

Exercice 2 On considère la fonction

$$\varphi(t) \;=\; \arctan\left(t^2 + 2t\right).$$

(i) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
(ii) Écrire le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de φ autour du point $t_0 = 0$.
*(iii) À l'aide de la formule de Taylor-Young et du polynôme trouvé ci-dessus, calculer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t}\,.$$

1. Rappel : $0 < 5 - \sqrt{21} < 1$ et $9 < 5 + \sqrt{21} < 10$.

Test 5 – Sujet B

Test 5 – Sujet B

Corrigé du test

Exercice 3

(i) La quantité $g(x)$ est définie si et seulement si $-x^2+5x-1>0$, c'est-à-dire $x^2-5x+1<0$. Les racines du polynôme x^2-5x+1 sont $(5-\sqrt{21})/2$ et $(5+\sqrt{21})/2$. Ainsi, le domaine de g est

$$\boxed{D_g = \left]\frac{5-\sqrt{21}}{2}\,,\,\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right[}\,.$$

(ii) En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$g'(x) = \frac{-2x+5}{-x^2+5x-1}\,.$$

(iii) Alors, le seul point critique de g est $x_1 = 5/2$, qui appartient au domaine de définition de g.

(iv) Dans le domaine de g le dénominateur est toujours positif. Alors, $g'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \leq 5/2$ (et $x > \left(5-\sqrt{21}\right)/2$). Donc, g est croissante seulement sur l'intervalle $\left(5-\sqrt{21}\right)/2 < x \leq 5/2$.

(v) Grâce à l'étude précédente, on trouve que $x_1 = 5/2$ est un point de maximum local. En plus, on a

$$g(5/2) \,=\, \ln\left(-1-\frac{25}{4}+5\,\frac{5}{2}\right) \,=\, \ln\left(-1+\frac{25}{4}\right) \,=\, \ln(21/4)\,.$$

Exercice 4

(i) On voit facilement que $\varphi(0)=0$. Si on calcule la dérivée première, on trouve

$$\varphi'(t) \,=\, \frac{2t+2}{1+(t^2+2t)^2} \qquad\Longrightarrow\qquad \varphi'(0)=2\,.$$

En dérivant encore, on a l'expression pour φ'' :

$$\begin{aligned}\varphi''(t) \quad &= \quad \frac{2}{1+(t^2+2t)^2} \,+\, (2t+2)\,\frac{(-1)\,2(t^2+2t)\,(2t+2)}{\left(1+(t^2+2t)^2\right)^2} \\ &= \quad \frac{2}{1+(t^2+2t)^2} \,-\, 2\,\frac{(t^2+2t)\,(2t+2)^2}{\left(1+(t^2+2t)^2\right)^2}\,,\end{aligned}$$

d'où on trouve $\varphi''(0)=2$.

(ii) Grâce aux calculs précédents, on obtient (pour $t \sim 0$)

$$\varphi(t) \,=\, 2t \,+\, t^2 \,+\, o\left(t^2\right)\,.$$

(iii) Vu que $t \to 0$, on peut utiliser le développement de φ qu'on vient de prouver. On a donc

$$\frac{\varphi(t)}{t} \,=\, \frac{2t\,+\,t^2\,+\,o\left(t^2\right)}{t} \,=\, 2\,+\,t\,+\,\frac{o\left(t^2\right)}{t} \longrightarrow 2$$

pour $t \to 0$.